Шифр:

С - 19

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике.
2018/2019
Ленинградская область

Район Тосненский

Школа МБОУ СОШ №3. г. Никольское.

Класс 11.

ФИО Миллер Вадим

Андреевич.

С-19

ЧИСТОВИК.

1	2	3	4	5	Σ
5	5	0	x	x	10

№1.

Сделаем табл. для 1 и 2 опросов:

2	3	4	5	6	7	8	9		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.
>1	>2	>3	>4	>5	>6	>7	>8	>9	>10.
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
<1	<2	<3	<4	<5	<6	<7	<8	<9	<10

• – зн., что мы не знаем, какой номер у человека.

(КАРАНДАШ используется в конце реш.)

Все числа целые, тогда сделаем из строгих неравенств нестрогие:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
≥ 2	≥ 3	≥ 4	≥ 5	≥ 6	≥ 7	≥ 8	≥ 9	≥ 10	≥ 11
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
≤ 0	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≤ 4	≤ 5	≤ 6	≤ 7	≤ 8	≤ 9 ~~≤ 10~~

Заметим, что чел. №9 и чел. №10 сказали по одному ~~ут~~ неравенству из второй части табл., но любое из них (неравенств 2 опроса) противоречит их изнач. высказываниям ($a_9 \geq 10$; $a_{10} \geq 11$), т.к. наиб. число со второго опроса не больше 9.

?

Зн. чел. №9 и чел. №10 – точно лжецы.

Зн. не может быть больше 8 рыцарей.

Докажем, что может быть 8:

									Лжецы	
чел. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.
число	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
нер 1	2>1	3>2	4>3	5>4	6>5	7>6	8>7	9>8	10>9	11>10.
нер 2.	2<3	3<4	4<5	5<6	6<7	7<8	8<9	9<10	10<1	10<2.

– пример для ...

С − 19.

ЧИСТОВИК.

№2 продолжение.

$(x-x_1-k)(x-x_2+k)=(x-x_1)(x-x_2)+1.$

$\cancel{x^2}-\cancel{x_2x}+\cancel{kx}-\cancel{x_1x}+\cancel{x_1x_2}-x_1k-\cancel{kx}+x_2k-k^2=\cancel{x^2}-\cancel{x_2x}-\cancel{x_1x}+\cancel{x_1x_2}+1.$

$k^2+x_1k-x_2k+1=0.$

$D=(x_1-x_2)^2-4$

$k\in\mathbb{Z}$. поэтому дискр. должен быть кв. целого числа. $\left(k=\dfrac{x_2-x_1\pm\sqrt{D}}{2}\right)$.

Т.е.: $(x_1-x_2)^2-4=N^2$.

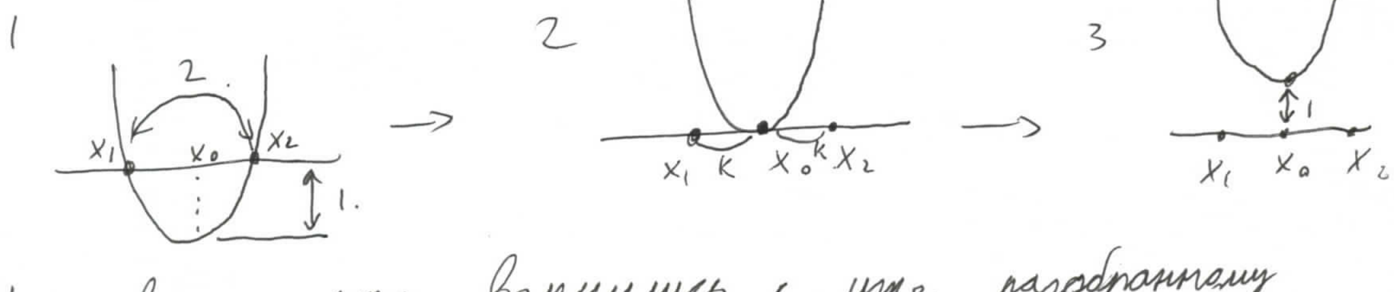
$(x_1-x_2)^2-N^2=4.$

Разность двух квадратов равно 4 только в одном случае:

$2^2-0^2=4$. (думаю, ~~это~~ утверждение можно не доказывать, как дост. известное).

Тогда $|x_1-x_2|=2$, а $k=1$.

Что получаем:



Мы видим, что вернулись к уже разобранному ранее случаю, а ситуации когда два первых трёхчлена имеют два целых корня не существует.

Зн., действительно, третий тр-н $x^2+ax+b+2$ корней не имеет.

ч. и т. д.

С-19 ЧИСТОВИК.

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	x	0	21

№11.7.

Чтобы доказ., что посл. убывает, нужно доказ, что каждый следующий член меньше предыдущего.
Т.е. доказать такое неравенство

$2^n(\sqrt[2^n]{a}-1) > 2^{n+1}(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1)$ для любых $n \in N$.

Преобразуем его следующим образом:

$\sqrt[2^n]{a}-1 > 2(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1)$.

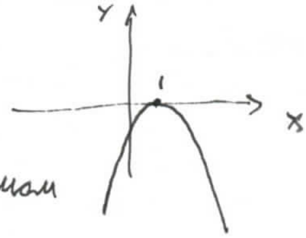
$0 > 2\sqrt[2^{n+1}]{a} - \sqrt[2^n]{a} - 1$.

$0 > 2a^{\frac{1}{2^{n+1}}} - a^{\frac{1}{2^n}} - 1$.

$0 > 2a^{\frac{1}{2^{n+1}}} - a^{\frac{2}{2^{n+1}}} - 1$.

Замена $x = a^{\frac{1}{2^{n+1}}}$

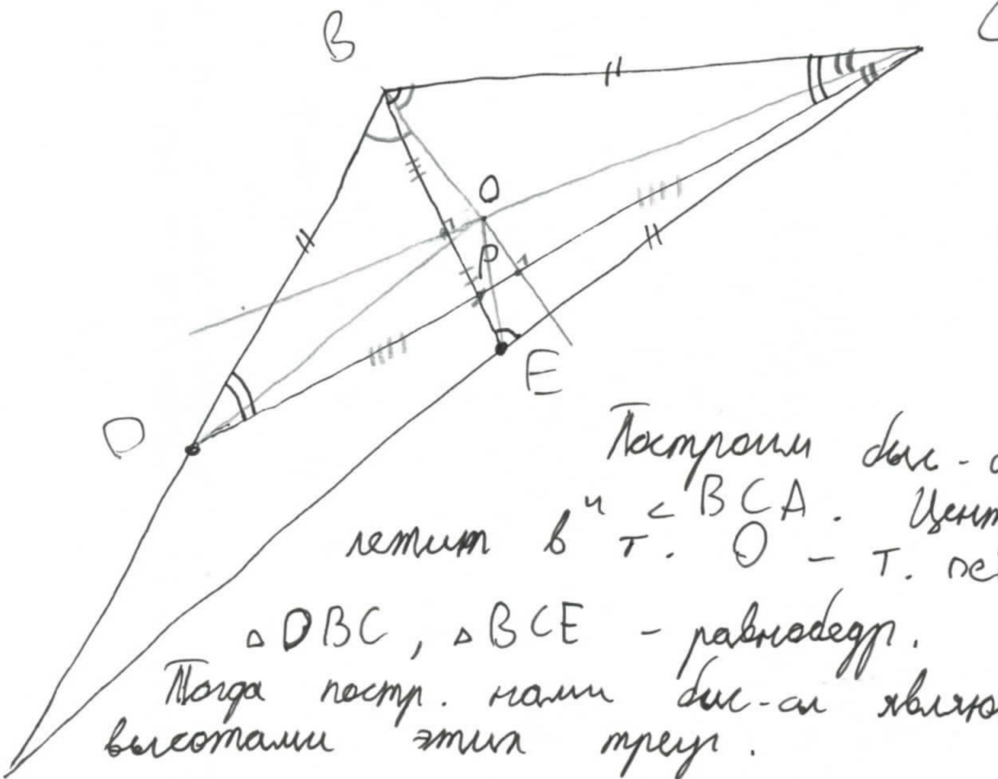
$0 > 2x - x^2 - 1.$ $\longrightarrow$



Это парабола ветвями вниз. с максимумом в $(1;0)$.

Т.е. при $x = a^{\frac{1}{2^{n+1}}} \neq 1$. неравенство доказано.
(все возможные знач $2x-x^2-1$ лежат ниже оси x).
Тогда допустим, что $x=1$.
Тогда $a^{\frac{1}{2^{n+1}}} = 1$. $\frac{1}{2^{n+1}} \neq 0$. $\Rightarrow a=1$.
Но по усл. $a \neq 1$. Зн. такой случай невозможен.
Неравенство доказан, задача решена.
ч. и т. д.

№11.8. С-19 ЧИСТОВИК.



(!) окр. около $\triangle DBP$ и окр. около $\triangle EPC$ пересек. в центре окр. внутри $\triangle ABC$.

Построим бис-сы углов $\angle ABC$ и $\angle BCA$. Центр впис. в $\triangle ABC$ окр. лежит в т. O — т. пересеч. эти бис-с.

$\triangle DBC$, $\triangle BCE$ — равнобедр.

Тогда постр. нами бис-сы являются медианами и высотами этих треуг.

~~Из этого~~ Из этого следует: 1) $\triangle EOC = \triangle OBC$, $\triangle OBC = \triangle DBO$

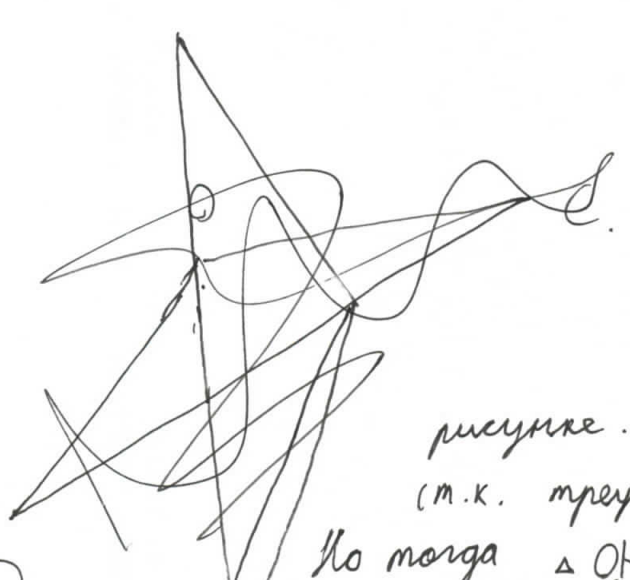
через равные ст. и углы
либо через симметрию отн. бис-с.

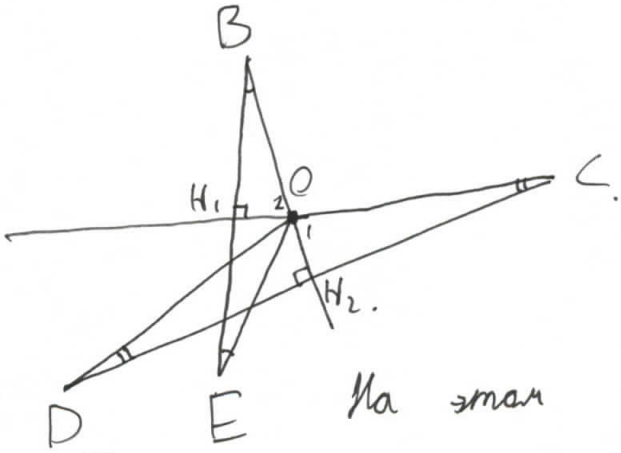
$\Downarrow$

$\triangle EOC = \triangle DBO$.

2) $\triangle BOE$, $\triangle DOC$ — равнобедр.

Рассмотрим подробнее $\triangle BOE$ и $\triangle DOC$:





На этом рисунке $\angle B = \angle E$ и $\angle D = \angle C$ (т.к. треуг. равнобедр.). $\angle 1 = \angle 2$ (верт). Но тогда $\triangle OH_1B$ и $\triangle OH_2C$ — прямоугольные с одним равным острым углом. Зн. $\angle B = \angle C$.

$\angle B = 90 - \angle 2 = 90 - \angle 1 = \angle C$. Тогда $\angle B = \angle E = \angle D = \angle C$.

С-19 ЧИСТОВИК

№11.8. продолжение.

Вернёмся к задаче.
Требуется доказ., что O леж. на окр. около $\triangle DBP$ и $\triangle EPC$.
$\angle EOC$ и $\angle EPC$ опир. на ~~одну дугу~~ один отр.
Зн надо лишь доказ., что эти равны
Тоже самое с другим треуг.: доказ., что $\angle DPB = \angle DOB$.

$\triangle EOC = \triangle DBO \Rightarrow \angle EOC = \angle DOB$.
$\angle EOC = 180° - \angle BEC + \angle BEO - ECO = 180° - \angle BEC + \angle BEO - \angle PCB + \angle PCO$
(т.к. $\angle ECO = \angle OCB = \angle PCB - \angle PCO$).
$\angle BEO = \angle PCO \Rightarrow \angle EOC = \angle DOB = 180° - \angle BEC - \angle PCB + 2\angle BEO$.
$\angle EPC = \angle DPB$ (верт.).
$\angle EPC = 180° - \angle BEC - \angle PCE = 180° - \angle BEC - \angle PCB + 2\angle PCO =$
$= 180° - \angle BEC - \angle PCB + 2\angle BEO$. (т.к. $\angle PCE = \angle ECO - \angle OCP =$
$= \angle PCB - 2\angle PCO$).
Таким образом $\angle EPC = \angle DPB = 180° - \angle BEC - \angle PCB + 2\angle BEO$.
и $\angle EOC = \angle DOB = 180° - \angle BEC - \angle PCB + 2\angle BEO$.
Мы видим, что $\angle EOC = \angle DOB = \angle EPC = \angle DPB$.
Это зн.: $\angle EOC = \angle EPC$ и опир на ~~одну~~ один. отрезок.
Зн. O лежит на окр. около $\angle EPC$.
$\angle DPB = \angle DOB$ и опир. на один отрезок.
Зн O лежит на окр. окол $\angle DPB$.
Т.е. эти окр. пересек. ~~в O~~ в т. O (а также в P, что очевидно), которая явл. центром окр., впис. в $\triangle ABC$,
ч.т.д.